اختبار الثلاثي الأوّل في مادّة الرّياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية — يوم 02 ديسمبر 2018 — المدّة: ساعتان

التّمرين الأوّل:

اختيار من متعدد : إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير.

1) نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E'): e^{2x}+5e^{x}+6=0$

مجموعة حلول المعادلة (E') هي :

أ) $S=\{-2;-3\}$	ب) $S=\{-\ln 2;-\ln 3\}$	ج) $S=\varnothing$ مجموعة خالية

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{x}$ هذه النهاية بعد ازالة حالة عدم التعيين تساوي :

أ) $l=5$	ب) $l=4$	ج) $l=0$

3) نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E):\ 3^{x+3}=27$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

أ) $S=\{\ln 3\}$	ب) $S=\{3\}$	ج) $S=\{0\}$

4) عبارة الدالة المشتقة الأولى f' للدالة f حيث ، $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$ من أجل x من $\mathbb{R}$ هي :

أ) $f'(x)=(\ln 2)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$	ب) $f'(x)=-(\ln 2)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$	ج) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$

التّمرين الثاني:

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{4}x+3$ ، و ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل)

I) تحقّق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

II) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=0$

وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أ) أنقل الشكل المقابل ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وَ تقاربها .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 4$.

3) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، هل هي متقاربة ؟ .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(4-u_n)$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n .

ج) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

5) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n المجموع S_n و الجداء P_n المعرفين كما يلي : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $P_n = (4-u_0)\times(4-u_1)\times.......\times(4-u_n)$.

أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم استنتج الجداء P_n

التّمرين الثالث:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \dfrac{x-2}{x} + \ln x$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\alpha \in]1,4;1,5[$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + (x-2)\ln(x)$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ ثم فسر النهاية عند الصفر هندسيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ: $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) بين أنّ : $f(\alpha) = 1 - \dfrac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ثمّ أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \approx 1,45$

4) ليكن (T_{x_0}) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 .

أ) عين x_0 إذا علمت أن المماس (T_{x_0}) يمر بالنقطة $A(2;0)$

ب) استنتج أن (C_f) يقبل مماسين يمران بالنقطة A ثم أكتب معادلة ديكارتية لكل منهما .

5) أنشئ كل من المماسين والمنحنى (C_f)

6) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]-\infty;0[$ بما يلي : $h(x) = f(-x)$

إشرح كيفية الحصول على التمثيل البياني (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ أنشئ (C_h).

الجزء الثالث:

نعتبر المستقيمات (d_m) المعطاة بالمعادلة الديكارتية $y = mx - 2m$ حيث m وسيط حقيقي.

أ) تحقق أن (d_m) يمر بالنقطة $A(2;0)$.

ب) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - 2m$

✌ بالتوفيق ☺ والنجاح ☺ في شهادة البكالوريا 2019 ❀ ❀ ✌

الأساتذة

الإجابة النموذجية

التّمرين الأوّل:

إختيار من متعدد : إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير.

1) لدينا في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $(E'): e^{2x}+5e^{x}+6=0$ نضع $e^{x}=t$ في تكافئ
$(E'): t^{2}+5t+6=0$ و منه مميز المعادلة ذات المجهول الحقيقي t، $\Delta=1$ أي أن $t=e^{x}=-2$
و $t=e^{x}=-3$ الحلان مرفوضان و منه مجموعة حلول المعادلة (E') هي : $S=\varnothing$

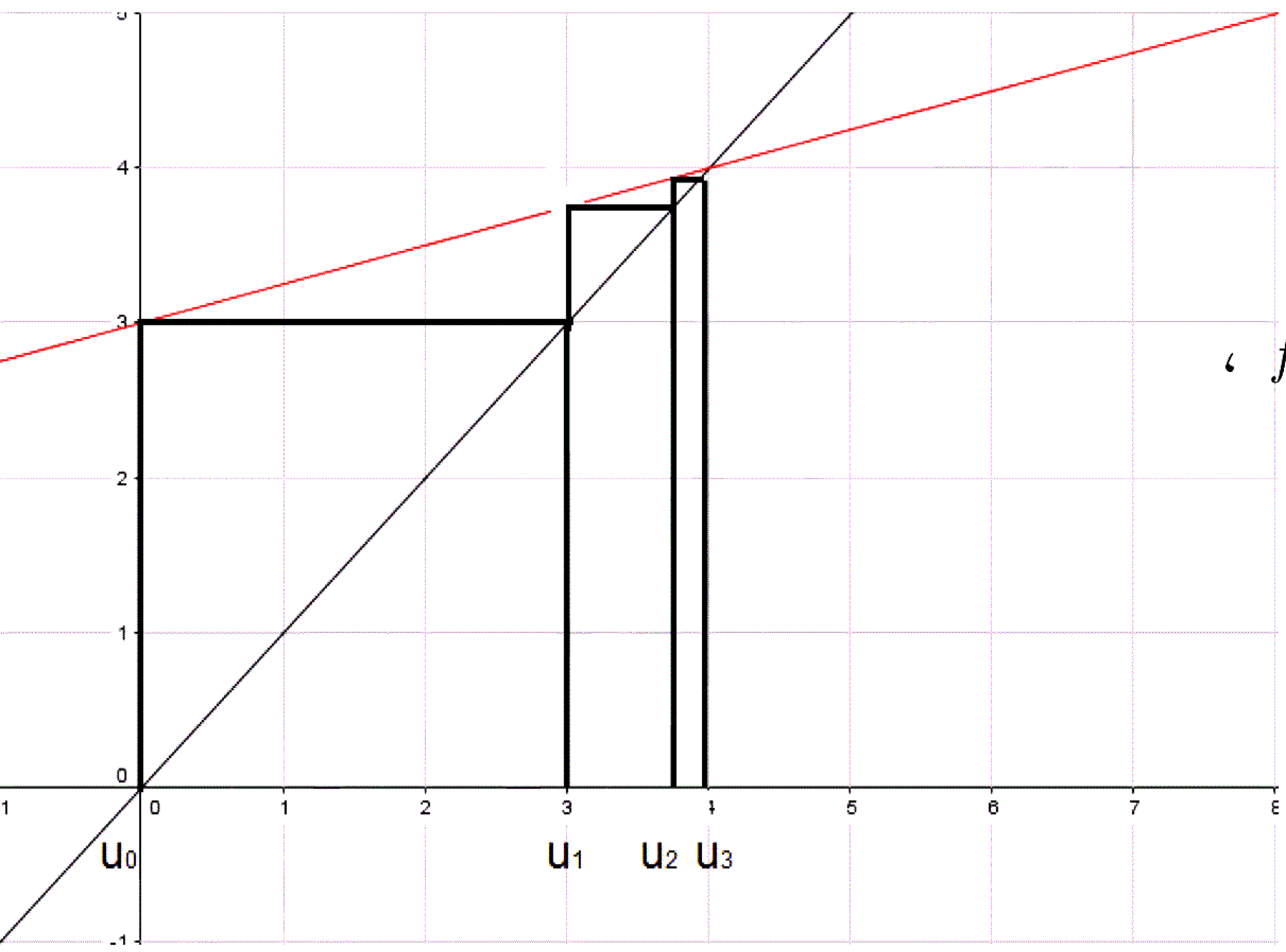
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}e^{x}(\dfrac{e^{4x}-1}{x})=\lim\limits_{x\to0}4e^{x}(\dfrac{e^{4x}-1}{4x})=\lim\limits_{x\to0}4e^{x}\times1=4$ هذه النهاية بعد ازالة حالة عدم التعيين تساوي : $l=4$

3) لدينا في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $e^{(x+3)\ln3}=27$ تكافئ $(x+3)\ln3=\ln27$ تكافئ
$(x+3)\ln3=3\ln3$ تكافئ $(x+3)\ln3=\ln3^{3}$ تكافئ $(x+3)\ln3=3\ln3$ تكافئ $x+3=3$
تكافئ $x=0$ مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{0\}$

4) عبارة الدالة المشتقة الأولى f' للدالة f حيث، $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$ من أجل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}=e^{(-x+1)\ln\frac{1}{2}}$ و منه عبارة الدالة المشتقة الأولى f' للدالة f.

$$f'(x)=-\left(\ln\frac{1}{2}\right)e^{(-x+1)\ln\frac{1}{2}}=(\ln2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$$



التّمرين الثاني:

التحقق أنّ f متزايدة على $[0;+\infty[$ لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{4}>0$ ،

و منه الدالة f متزايدة على $[0;+\infty[$.

II(1) أ) **تمثيل الحدود** u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 :(أنظر الشكل المقابل)

ب) **التخمين** : ——————————————

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ،

و تتقارب حدودها نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم (Δ).

2) **البرهان أنّ** : $0\le u_n\le4$:——————————————

نضع : $P(n): 0\le u_n\le4$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ أي : $1\le u_0\le5$ و منه $P(0)$ محققة.

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n. أي نفرض أن

$4 \geq u_n \geq 0$ صحيحة و نبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq 4$.

– لدينا فرضا أنّ: $0 \leq u_n \leq 4$ ، و بما أنّ f متزايدة على $[0;4]$ ، فإنّ: $f(0) \leq f(u_n) \leq f(4)$ ، أي :

$3 \leq u_{n+1} \leq 4$ ، ومنه : $0 \leq u_{n+1} \leq 4$. و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

3) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها: ————————————————————

من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3$. لدينا $0 \leq u_n \leq 4$ تكافئ $-\frac{3}{4}u_n + 3 \geq -3 + 3$ $-\frac{3}{4}u_n$

تكافئ $u_{n+1} - u_n \geq 0$:

بعد الدراسة نلاحظ أنّه على المجال $[0;4]$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

- بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الاعلى ، فهي متقاربة.

3)أ) بيان أن (v_n) متتالية حسابية : ————————————————————

لدينا: $v_n = \ln(4 - u_n)$ ،أي :

$$v_{n+1} = \ln(4 - u_{n+1}) = \ln(4 - \frac{1}{4}u_n - 3) = \ln(1 - \frac{1}{4}u_n) = \ln(\frac{1}{4})(4 - u_n) = -\ln 4 + \ln(4 - u_n) = v_n - \ln 4$$

،

و منه : $v_{n+1} - v_n = -\ln 4$ ، إذن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -\ln 4$ ، و حدها الأول :

$v_0 = \ln(4 - u_0) = \ln(4 - 0) = \ln 4$.

ب) التعبير عن v_n بدلالة n و u_n بدلالة n : ————————————————————

- عبارة v_n : $v_n = v_0 + nr$ ، أي : $v_n = +\ln 4 - n\ln 4 = (\ln 4)(-n + 1)$.
- عبارة u_n : لدينا $v_n = \ln(4 - u_n)$ أي: $e^{v_n} = 4 - u_n$ ، أي: $u_n = 4 - e^{v_n}$ ، أي : $u_n = 4 - e^{\ln 4(-n+1)}$

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) : ————————————————————

نعلم أنّ : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(4 - e^{\ln 4(-n+1)}) = 4$ ، لأنّ : $\lim_{n\to+\infty} e^{\ln 4(-n+1)} = 0$ ، و منه : $\lim_{n\to\infty} u_n = 4$.

5) حساب المجموع S_n : ————————————————————

لدينا :

$$..+ v_n = \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2} = \frac{(n+1)(\ln 4 + \ln 4(-n+1))}{2} = \frac{(n+1)(2\ln 4 + -2n\ln 2)}{2} = (n+1)(2\ln 2 + -n\ln 2)$$

. حساب الجداء p_n : $P_n = (4 - u_0) \times (4 - u_1) \times .... \times (4 - u_n)$: نعلم أنّ : $u_n = 4 - e^{v_n}$ ،أي:

$$P_n = (4 - (4 - e^{v_0})) \times (4 - (4 - e^{v_1})) \times .... \times (4 - (4 - e^{v_n})) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times ...... \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + ...v_n}$$

$$P_n = e^{S_n} = e^{\ln 2(n+1)(2-n)} = (2)^{(n+1)(2-n)}$$

التّمرين الثالث:

الجزء الأول : نعتبر الدّالّة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}$.

1) حساب النهايات :

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}-2\\0^+\end{cases}$ $\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty\\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x-2}{x} = -\infty\end{cases}$.

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1\end{cases}$.

2) دراسة تغيّرات الدالة g و تشكيل جدول تغيّراتها :

الدالّة المشتقة :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ،

و دالتها المشتقة هي : $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.

نلاحظ أنّ : $g'(x)>0$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

إذن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول التغيّرات :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث : $1,4<\alpha<1,5$:

الدالة g مستمرة و رتيبة على $]0;+\infty[$ ، إذن هي مستمرة و رتيبة على المجال $[1,4;1,5]$.

و بما أنّ : $\begin{cases}g(1,4)=-0,09\\ g(1,5)=0,07\end{cases}$ أي : $g(1,4)\times g(1,5)<0$ ، إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α

حيث : $1,4<\alpha<1,5$.

✓ إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0;+\infty[$: نلخّص الإشارة في الجدول التالي :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

من أجل $x\geq\alpha$ يكون $g(x)\geq g(\alpha)$ ، أي : $g(x)\geq 0$.

من أجل $0<x<\alpha$ يكون $g(x)<g(\alpha)$ ، أي : $g(x)<0$.

الجزء الثاني : f دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+(x-2)\ln x$.

1) حساب النهايات :

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left[1+(x-2)\ln x\right] = \color{red}{+\infty}$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x-2) = -2 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \end{cases}$.

التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديّا معادلته $x=0$.

✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[1+(x-2)\ln x\right] = \color{red}{+\infty}$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f و تشكيل جدول تغيّراتها :

✓ **الدالة المشتقة :** الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ، و دالتها المشتقة هي :

$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x-2)$ ، أي : $f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$ ، ومنه : $f'(x) = g(x)$.

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

✓ **جدول التغيّرات :**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) بيّن أنّ : $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ، ثمّ أعط قيمة مقرّبة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \approx 1,45$.

نعلم أنّ : $g(\alpha)=0$ ، أي : $\ln\alpha + \frac{\alpha-2}{\alpha} = 0$ ، ومنه : $\ln\alpha = -\frac{\alpha-2}{\alpha}$.

نحسب الآن $f(\alpha)$: $f(\alpha) = 1+(\alpha-2)\ln\alpha$ ، أي : $f(\alpha) = 1+(\alpha-2)(-\frac{\alpha-2}{\alpha})$ ، ومنه :

$f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ، و هو المطلوب .

✓ من أجل $\alpha \approx 1,45$ ، يكون : $f(\alpha) \approx \color{red}{0,8}$.

4) (T_{x_0}) هو المماس لـلمنحني (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 :

أ) كتابة معادلة المماس (T_{x_0}) : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

ب) بما أنّ (T_{x_0}) يشمل النقطة $A(2;0)$ فيكون لدينا : (إحداثياها يحقّقان معادلة المماس (T_{x_0})) .

أي : $0 = f'(x_0)(2-x_0)+f(x_0)$ ، أي : $0 = \left[\ln x_0 + \dfrac{x_0-2}{x_0}\right](2-x_0)+1+(x_0-2)\ln x_0$ ، ومنه :

$0 = (x_0-2)\left[\ln x_0 - (\ln x_0 + \dfrac{x_0-2}{x_0})\right]+1$ ، أي : $(x_0-2)\left[-\dfrac{x_0-2}{x_0}\right] = -1$ ، ومنه :

$-\dfrac{(x_0-2)^2}{x_0} = -1$ ، أي : $-(x_0-2)^2 = -x_0$ ، أي : $(x_0-2)^2 = x_0$ ، أي : $x_0^2-4x_0+4-x_0 = 0$ ،

ومنه : $x_0^2-5x_0+4=0$ ، معناه أنّ : $x_0 = 1$ ، أو $x_0 = 4$.

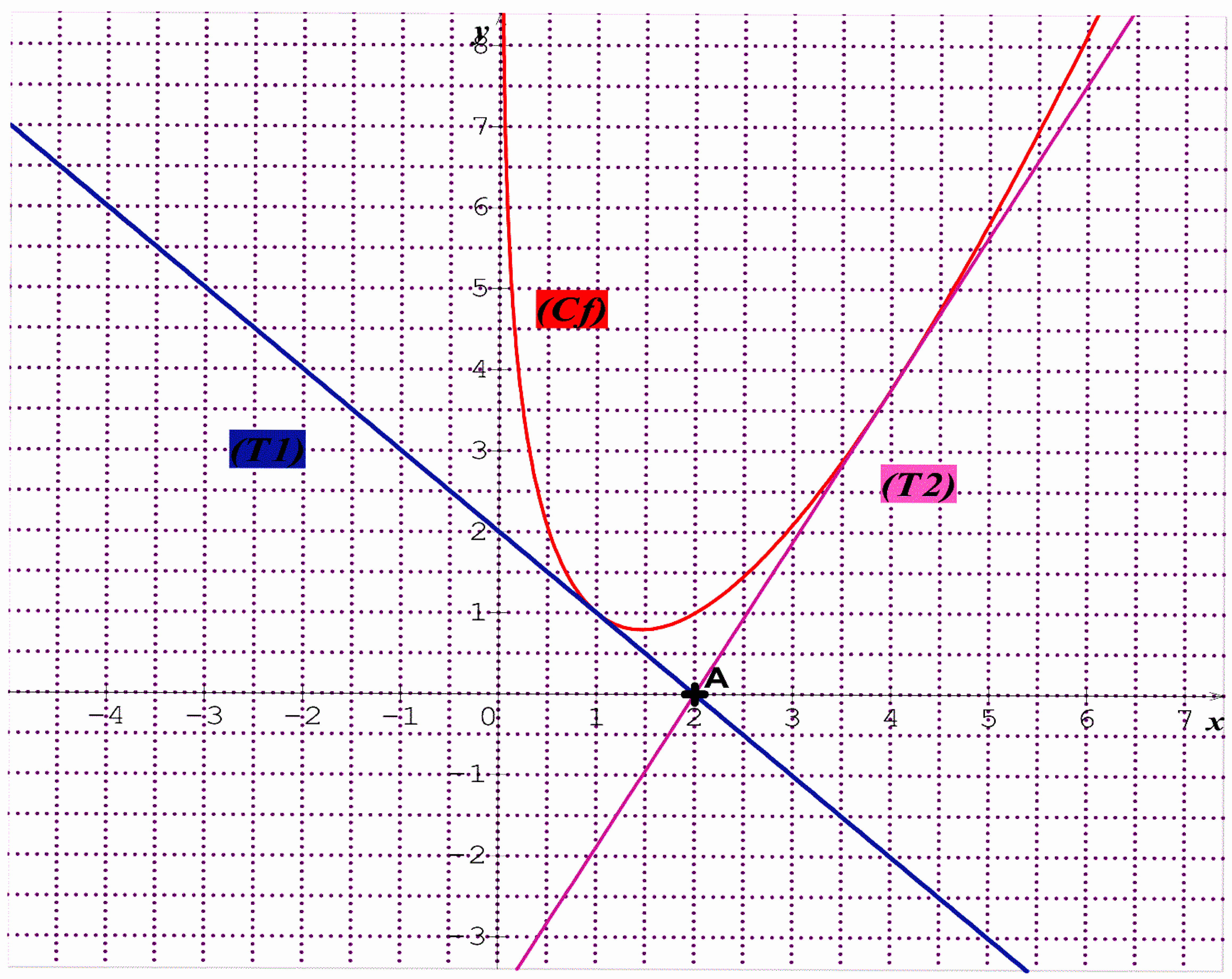
ج) إذن المنحني (C_f) يقبل مماسين يمران بالنقطة A :

- ✓ المماس الأول يمسّ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
- ✓ المماس الثاني يمسّ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 4 .

1) معادلة المماس الأول : $(T_1): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ، ومنه : $(T_1): y = -x+2$.

2) معادلة المماس الثاني : $y = f'(4)(x-4)+f(4)$ ، ومنه : $(T_2): y = (\ln 4 + \dfrac{1}{2})x - 2\ln(4) - 1$

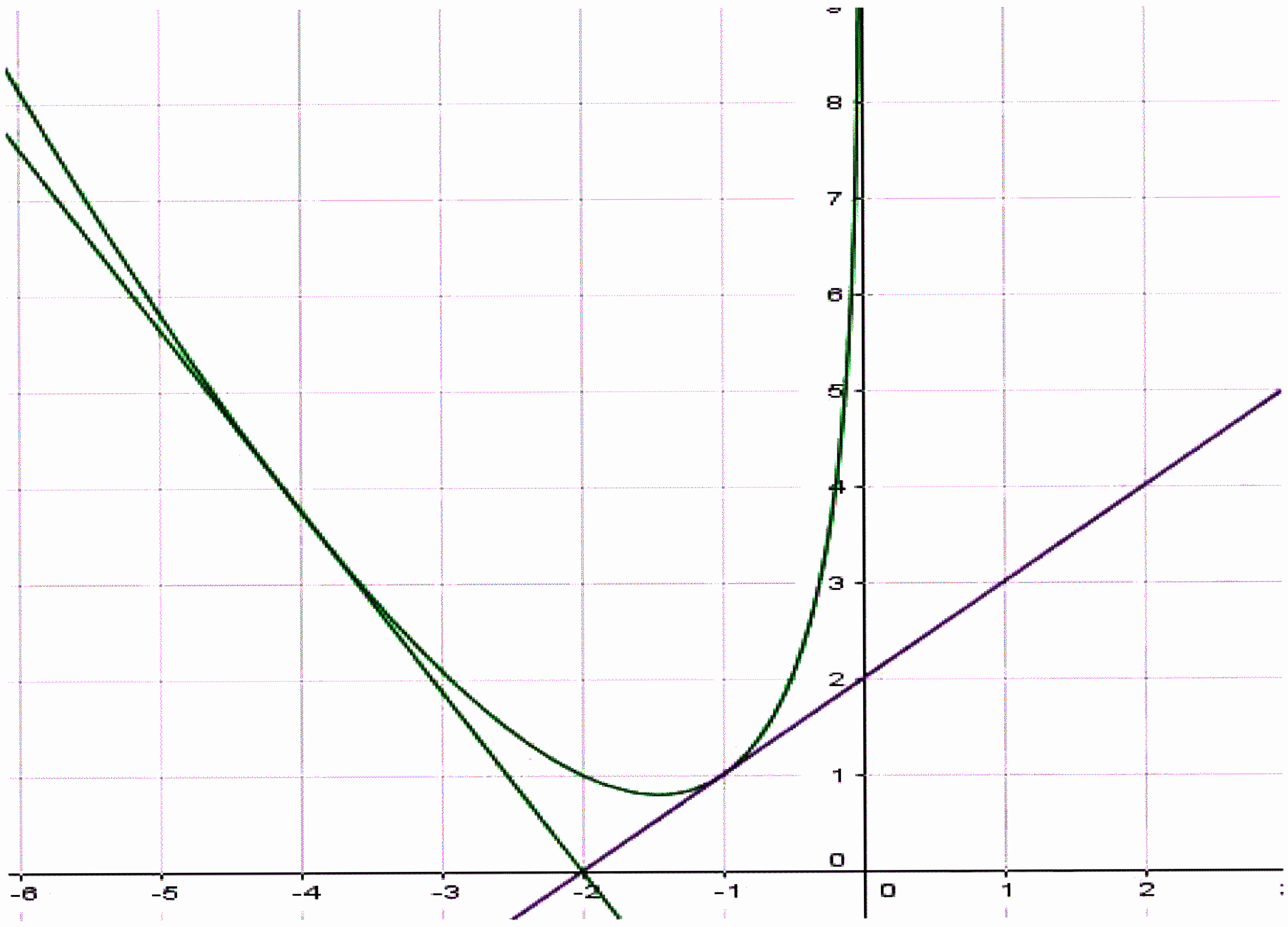
5) رسم المماسين و المنحني (C_f) :



6) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]-\infty;0[$ بما يلي : $h\left(x\right)=f\left(-x\right)$

$\left(C_h\right)$ نظير $\left(C_f\right)$ بالنسبة لحامل محور التراتيب

رسم المماسين و المنحني $\left(C_h\right)$



الجزء الثالث : $(d_m):y=mx-2m$.

أ) التحقق أنّ : (d_m) يمر بالنقطة A أي : نعوض إحداثيي النقطة A في معادلة المستقيم (d_m) :

$0=m(2)-2m$ ، إذن : (d_m) يشمل النقطة A .

ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x)=mx-2m$:

عدد حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (d_m) .

المستقيم (d_m) يتحرك حركة دورانية حول النقطة الثابتة A .

نعلم أنّ المماسين (T_1) و (T_2) يمرّان أيضا بالنقطة A .

لدينا : $\begin{cases}(d_m):y=mx-2m\\(T_1):y=-x+2\\(T_2):y=(\ln 4+\frac{1}{2})x-2\ln(4)-1\end{cases}$. ندرس ثلاث حالات :

✓ لما : $m<0$ ، هناك ثلاث حالات :

1) $m<-1$ معناه أنّ : (d_m) يقع فوق (T_1) ، ومنه المعادلة تقبل حلّين متمايزين .

2) $m=-1$ معناه أنّ : (d_m) هو نفسه (T_1) ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو 1 .

3) $-1 < m < 0$ معناه أنّ : (d_m) يقع تحت (T_1) ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ لما : $m = 0$ معناه أنّ : $(d_m) : y = 0$ ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ لما : $m > 0$ ، هناك ثلاث حالات :

1) $0 < m < \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ : (d_m) يقع تحت (T_2) ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

2) $m = \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ : (d_m) هو نفسه (T_2) ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو 4 .

3) $m > \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ : (d_m) يقع فوق (T_2) ، ومنه المعادلة تقبل حلين متمايزين .

الأساتذة

✌ بالتوفيق☺ والنجاح☺ في شهادة البكالوريا 2019 ❀ ❀ ✌

☺زايدي علاء الدين☺
☺بخاخ صورية☺